

**KVANTITATIVNE METODE U GRAĐEVINSKOM  
MENADŽMENTU**

vježbe 2017/18

**MATEMATIČKA STATISTIKA**

- 1. Prikupljanje i prikaz podataka (vrijednosti obilježja, frekvencije: apsolutne i relativne; kumulativne frekvencije: apsolutne i relativne)**
- 2. Karakteristike empirijske raspodjele: mjere srednjih vrijednosti i odstupanja (aritmetička sredina, standardna devijacija, koeficijent varijacije)**

**V4**

**Zadatak 1.**

Na osnovu skupa od 90 izmjerenih vrijednosti dobijenih ispitivanjem čvrstoće betona pri pritisku odrediti:

- grupisati dobijene podatke i prikazati u odgovarajućoj statističkoj tabeli sa prikazom  $f_i$  (apsolutnih frekv.) i  $f_{ri}$  (relativnih frekvencija)
- nacrtati histogram i poligon apsolutne i relativne frekvencije
- nacrtati funkciju empirijske raspodjele (funkciju raspodjele kumulativne relativne frekvencije)  $F(x)$
- sračunati aritmetičku sredinu, modu i medijanu empirijske raspodjela
- sračunati varijansu i standardno odstupanje za empirijsku raspodjelu slučajne promjenljive  $X$

55,0	55,0	55,0	32,0	38,5	33,7	40,5	40,0	42,0	41,5
52,0	51,0	51,2	45,0	45,0	56,0	48,3	53,9	44,5	45,0
43,5	52,5	47,5	48,8	45,5	45,0	43,5	49,5	41,3	52,8
47,0	47,9	46,5	38,3	43,3	40,1	48,3	48,7	50,0	53,2
50,5	52,5	53,0	52,0	52,5	51,2	52,5	47,5	51,5	61,5
49,3	53,0	48,5	40,0	36,0	40,7	52,5	44,2	48,5	51,5
54,3	53,5	50,0	46,2	42,5	42,5	50,0	52,5	51,2	40,0
40,8	42,5	53,0	55,3	53,5	45,8	44,0	45,0	50,2	51,2
52,2	48,8	50,0	46,5	53,0	55,0	56,2	60,0	51,2	57,0

**RJEŠENJE**

- a) grupisati dobijene podatke i prikazati u odgovarajućoj statističkoj tabeli sa prikazom  $f_i$  i  $f_{ri}$

1. grupisati podatke u intervale ( $n$  intervala)

$$n = \sqrt{N} \text{ - broj intervala (klasa, grupa), } n \geq 8$$

**usvojeno  $n=8$**

N	n
40-60	6-8
60-100	7-10
100-200	8-12
200-500	12-17
> 500	21

2. usvojiti širinu intervala (klase, grupe)  $d$

$$x_{\max} = 61,5$$

$$x_{\min} = 32,0$$

$$d = (x_{\max} - x_{\min}) / n = 3,7$$

Zadatak 1.  
Nastavak

55,0	55,0	55,0	32,0	38,5	33,7	40,5	40,0	42,0	41,5
52,0	51,0	51,2	45,0	45,0	56,0	48,3	53,9	44,5	45,0
43,5	52,5	47,5	48,8	45,5	45,0	43,5	49,5	41,3	52,8
47,0	47,9	46,5	38,3	43,3	40,1	48,3	48,7	50,0	53,2
50,5	52,5	53,0	52,0	52,5	51,2	52,5	47,5	51,5	61,5
49,3	53,0	48,5	40,0	36,0	40,7	52,5	44,2	48,5	51,5
54,3	53,5	50,0	46,2	42,5	42,5	50,0	52,5	51,2	40,0
40,8	42,5	53,0	55,3	53,5	45,8	44,0	45,0	50,2	51,2
52,2	48,8	50,0	46,5	53,0	55,0	56,2	60,0	51,2	57,0

**RJEŠENJE**

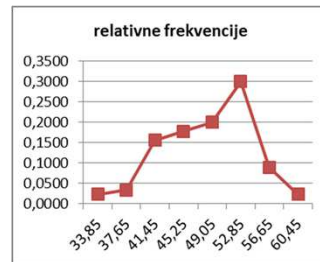
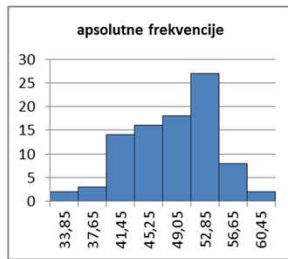
3. statistička tabela sa grupisanim podacima i  $f_i$ ,  $f_{ri}$

tabela 1

granice intervala $u_i \leq x_j \leq u_{i+1}$		sredina grupnog intervala $x_j = 1/2 * (u_{j-1} + u_j)$	apsolutne frekvencije	kumulativne apsolutne frekvencije	relativne frekvencije	kumulativne relativne frekvencije
$u_i$	$u_{i+1}$	$x_j$	$f_j$	$\Sigma f_j$	$f_{rj} = f_j / N$	$F(x) = \Sigma f_{rj} \quad j=1, N$
32,0	35,7	33,85	2	2	0,0222	0,0222
35,8	39,5	37,65	3	5	0,0333	0,0555
39,6	43,3	41,45	14	19	0,1556	0,2111
43,4	47,1	45,25	16	35	0,1778	0,3889
47,2	50,9	49,05	18	53	0,2000	0,5889
51,0	54,7	52,85	27	80	0,3000	0,8889
54,8	58,5	56,65	8	88	0,0889	0,9778
58,6	62,3	60,45	2	90	0,0222	1,0000
			$\Sigma =$	90	1,0000	

**Zadatak 1.**  
nastavak

**b) nacrtati histogram i poligon apsolutne i relativne frekvencije (nacrtano na osnovu tabele 1)**



**c) nacrtati funkciju empirijske raspodjele (funkciju raspodjele kumulativne relativne frekvencije) F(x) (nacrtano na osnovu tabele 1)**



granice intervala $u_i$   $u_{i+1}$	sredina grupnog intervala $x_j = 1/2(u_i + u_{i+1})$	apsolutne frekvencije $f_j$	kumulativne apsolutne frekvencije $\Sigma f_j$	relativne frekvencije $f_j/N$	kumulativne relativne frekvencije $F(x) = \Sigma f_j, j=1, N$
32,0   35,7	33,85	2	2	0,0222	0,0222
35,8   39,5	37,65	3	5	0,0333	0,0555
39,6   43,3	41,45	14	19	0,1556	0,2111
43,4   47,1	45,25	16	35	0,1778	0,3889
47,2   50,9	49,05	18	53	0,2000	0,5889
51,0   54,7	52,85	27	80	0,3000	0,8889
54,8   58,5	56,65	8	88	0,0889	0,9778
58,6   62,3	60,45	2	90	0,0222	1,0000
		$\Sigma =$	90		1,0000

Zadatak 1.  
nastavak

**d) sračunati aritmetičku sredinu, modu i medijanu empirijske raspodjela**

1. aritmetička sredina na osnovu izvornih podataka (90)

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N x_j = 48,2$$

2. aritmetička sredina na osnovu grupisanih podataka u n klasa (grupa) – sračunato na osnovu tabele 2.

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^n x_j \cdot f_j = 48,5$$

3. medijana – vrijednost xi za koju je kumulativna relativna frekvencija  $F(x_i) = 0,5$  (oznaceno u tabeli 1)

- medijana se nalazi u intervalu sa granicama (47,2;50,9)

$$\overline{M}_e = L + d \cdot \frac{\frac{N}{2} - \sum_{i=1}^k f_i}{f_{k+1}} = 47,2 + 3,7 \cdot \frac{90/2 - 35}{18} = 49,26$$

**Tabela 2**

sredina grupnog intervala $x_j = 1/2 \cdot (u_{j-1} + u_j)$	apsolutne frekvencije	proizvod sredine grupnog intervala i apsolutne frekvencije
$x_j$	$f_j$	$x_j \cdot f_j$
33,85	2	67,700
37,65	3	112,950
41,45	14	580,300
45,25	16	724,000
49,05	18	882,900
52,85	27	1.426,950
56,65	8	453,200
60,45	2	120,900
$\Sigma =$	90	4368,9

granice intervala $u_i$ i $u_{i+1}$		sredina grupnog intervala $x_j = 1/2 \cdot (u_{j-1} + u_j)$	apsolutne frekvencije	kumulativne apsolutne frekvencije	relativne frekvencije	kumulativne relativne frekvencije
$u_i$	$u_{i+1}$	$x_j$	$f_j$	$\Sigma f_j$	$f_j/N$	$F(x) = \Sigma f_j / N$
32,0	35,7	33,85	2	2	0,0222	0,0222
35,8	39,5	37,65	3	5	0,0333	0,0555
39,6	43,3	41,45	14	19	0,1556	0,2111
43,4	47,1	45,25	16	35	0,1778	0,3889
47,2	50,9	49,05	18	53	0,2000	0,5889
51,0	54,7	52,85	27	80	0,3000	0,8889
54,8	58,5	56,65	8	88	0,0889	0,9778
58,6	62,3	60,45	2	90	0,0222	1,0000
$\Sigma =$			90		1,0000	

Zadatak 1.  
nastavak

d) **sračunati aritmetičku sredinu, modu i medijanu empirijske raspodjela**

4. moda- vrijednost za koju je najveća frekvencija  
–na osnovu grupisanih podataka u n grupa (klasa) (iz tabele 1):

$$\overline{M}_o = L + d \cdot \frac{\Delta_1}{\Delta_1 + \Delta_2} = 51 + 3,7 \frac{9}{(9 + 19)} = 52,2$$

–gdje su:

L=lijeva granica klase u kojoj se nalazi moda

L=51

d=širina grupnog intervala,

d=3,7

$\Delta_1$ - razlika modalne frekvencije i susjedne prethodne

$\Delta_1=27-18=9$

$\Delta_2$ - razlika modalne frekvencije i susjedne naredne

$\Delta_2=27-8=19$

granice intervala $u_i \leq x_i < u_{i+1}$		sredina grupnog intervala $x_j = 1/2 \cdot (u_{i,j} + u_{i+1,j})$	apsolutne frekvencije $f_j$	kumulativne apsolutne frekvencije $\Sigma f_j$	relativne frekvencije $f_j/N$	kumulativne relativne frekvencije $F(x) = \Sigma f_j / N$
32,0	35,7	33,85	2	2	0,0222	0,0222
35,8	39,5	37,65	3	5	0,0333	0,0555
39,6	43,3	41,45	14	19	0,1556	0,2111
43,4	47,1	45,25	16	35	0,1778	0,3889
47,2	50,9	49,05	18	53	0,2000	0,5889
51,0	54,7	52,85	27	80	0,3000	0,8889
54,8	58,5	56,65	8	88	0,0889	0,9778
58,6	62,3	60,45	2	90	0,0222	1,0000
$\Sigma =$			90		1,0000	

Zadatak 1.  
nastavak

**5. sračunati varijansu i standardno odstupanje za empirijsku raspodjelu slučajne promjenljive**

1. varijansa (obracun za grupisane podatke), obavlja se u tabeli dodatnim proračunom kolone  $x_i^2 f_i$ , prema formuli

$$s^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^n x_i^2 f_i - \bar{x}^2$$

$$s^2 = \frac{1}{90} \cdot 215061,385 = 37,3$$

sredina grupnog intervala $x_j = 1/2 \cdot (u_{j-1} + u_j)$	apsolutne frekvencije	proizvod sredine grupnog intervala i apsolutne frekvencije	proizvod kvadrata sredine grupnog intervala i apsolutne frekvencije
$x_j$	$f_j$	$x_j \cdot f_j$	$x_j^2 \cdot f_j$
33,85	2	67,700	2.291,645
37,65	3	112,950	4.252,568
41,45	14	580,300	24.053,435
45,25	16	724,000	32.761,000
49,05	18	882,900	43.306,245
52,85	27	1.426,950	75.414,308
56,65	8	453,200	25.673,780
60,45	2	120,900	7.308,405
$\Sigma =$	90	4368,9	215061,385

2. standardno odstupanje  $\sigma = \sqrt{s^2} = \sqrt{37,3} = 6,109$